

References

1. Kvitka S.A. Foresight as the technology of the future: the latest mechanisms of interaction of public authorities, business and civil companies. *Aspekty publichnogo upravlinya*. 2016. № 8 (34). P. 5-15.
2. Kovtonyuk M.M. Fundamentalisation of professional preparedness of future teachers of mathematics - bachelor level: a monograph. *Vinnytsia: TOV firma «Planer»*, 2013. 424 p.
3. Reshetnyak O.I. Foresight methods in the management of scientific and technological development. *Efektivna ekonomika*. 2019. № 12. URL: <http://www.economy.nayka.com.ua/?op=1&z=7492>. DOI: [10.32702/2307-2105-2019.12.67](https://doi.org/10.32702/2307-2105-2019.12.67).
4. Filippova V.D. Foresight-technology as a tool for the formation and implementation of state policy in the field of pedagogical education. *Teoria ta praktyka dershavnogo upravlinnya I misceвого samovryaduvannya: electron. nauk. fach. vyd.*, 2020. №1. http://el-zbim-du.at.ua/2020_1/30.pdf.

Ivan Lenchuk, Dr. Sc.

Ivan Franko Zhytomyr State University, Zhytomyr, Ukraine

e-mail: lench456@gmail.com

INTERNAL PROJECTION METHOD AND CUBE METRIC

Abstract. Constructive (constructive) stereometry often uses the method of internal projection in solving various proposals, which allows to reduce each of them to a simpler or previously solved problem. We have demonstrated in the text just such a technique for establishing the essence of important metric characteristics of the cube.

Key words and phrases. Constructive stereometry, internal projection, cube metric, common perpendicular.

Усі уявляють куб і добре знають його очевидні метричні властивості. Суть важливим метричним фактом є також те, що кожна діагональ куба має дві й лише дві перпендикулярні площини, які ділять її на три рівні частини, що легко довести операцією *внутрішнього проєкціювання*. Варто розуміти, що коли на рисунку діагональ визначається двома протилежними вершинами куба, то кожна із площин, перпендикулярних цій діагоналі, – трьома іншими вершинами, що є кінцями ребер куба, які виходять із обраної кінцевої точки діагоналі.

Задача. Побудуйте спільний перпендикуляр між двома мимобіжними діагоналями суміжних граней куба.

1-й спосіб розв'язання. Нехай A_1B і B_1C – діагоналі суміжних граней куба, задані в умові (рис. 1). Із конструктивного означення спільного перпендикуляра двох мимобіжних прямих безпосередньо випливає алгоритм побудови: 1) через пряму A_1B проведемо площину $\Sigma(A_1BD)$, паралельну прямій B_1C ($A_1D \parallel B_1C$); 2) через точку C прямої B_1C проведемо пряму n , перпендикулярну до площини Σ ($n \parallel A_1C$, де $A_1C \perp \Sigma(A_1BD)$); 3) знайдемо точку P перетину прямої n і площини Σ ; 4) у площині Σ через точку P проведемо пряму p , паралельну прямій A_1D (і, отже, $p \parallel B_1C$); 5) знайдемо точку M перетину прямих p і A_1B_1 ; 6) через точку M проведемо пряму q , паралельну прямій n ; 7) зафіксуємо точку N перетину прямих q і B_1C . MN – шуканий спільний перпендикуляр. Графічно на проекційному кресленні куба відтворено класичну модель в її розв'язанні.

2-й спосіб розв'язання. Інколи ж, як відомо, доречно обрати пріоритетним інший побудовний метод (рис. 2).

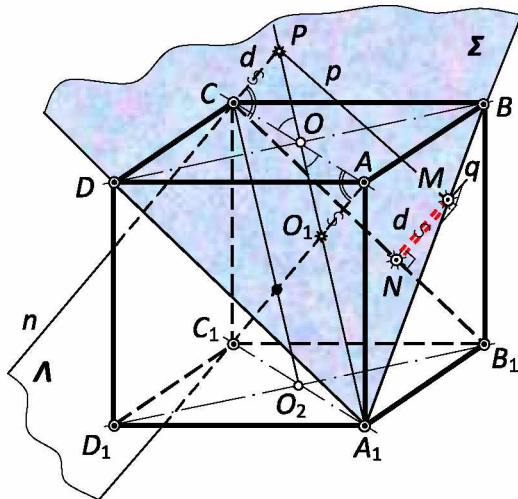


Рис. 1

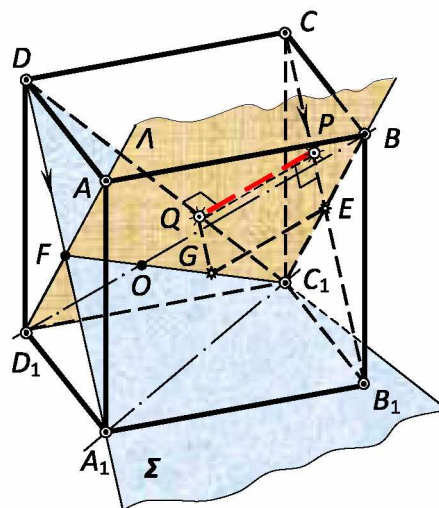


Рис. 2

Отже, площину Λ , перпендикулярну діагоналі CB_1 у грані куба CC_1B_1B , побудовно зручно задати (творчий момент) його діагональним перерізом ABC_1D_1 ($BD_1 \subset \Lambda(ABC_1D_1)$, $CB_1 \perp C_1B$, $CB_1 \perp D_1C_1$), адже Λ вміщує ще й точку C_1 діагоналі

C_1D , яка мимобіжна з CB_1 і належить грані DD_1C_1C , що суміжна із гранню CC_1B_1B . CB_1 у внутрішньому ортогональному проєкціюванні за напрямом $C \rightarrow B_1$ вироджується на площину Λ в точку E , а C_1D відбивається у відрізок C_1F , яким визначається пряма перетину площини Λ із площиною $\Sigma(DA_1C_1)$, що перпендикулярно розміщена до діагоналі BD_1 . Тепер опустити перпендикуляр із точки E на пряму C_1F неважко. Він, по-перше, паралельний до BD_1 і, по-друге, матиме своєю основою точку G у перетині з C_1F . **Оберненим проєкціюванням** за напрямом $B_1 \rightarrow C$ легко зображаємо спільний перпендикуляр PQ заданих мимобіжних прямих CB_1 і C_1D .

3-й спосіб розв'язання. Нехай у ролі мимобіжних прямих двох суміжних граней куба AA_1B_1B і BB_1C_1C , що задані умовою задачі, будуть їх діагоналі AB_1 і BC_1 відповідно (рис. 3). Діагональ CA_1 куба є похилою до обох указаних граней. **Проекціюємо CA_1 ортогонально** на ліву грань куба за напрямом $C \rightarrow B$ в іншу діагональ цієї ж грані BA_1 , яка перпендикулярна AB_1 , а на передню грань – за напрямом $A_1 \rightarrow B_1$ у діагональ CB_1 , яка перпендикулярна BC_1 . Тоді, згідно з узагальненою теоремою про три перпендикуляри, $CA_1 \perp AB_1$ і $CA_1 \perp BC_1$. Таким чином, CA_1 перпендикулярна обом заданим діагоналям.

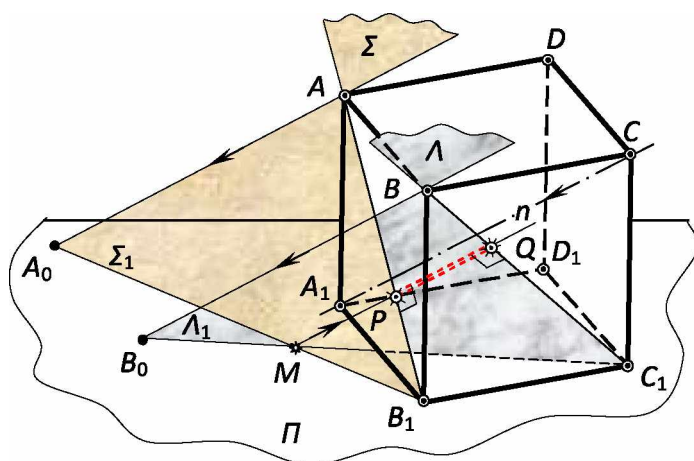


Рис. 3

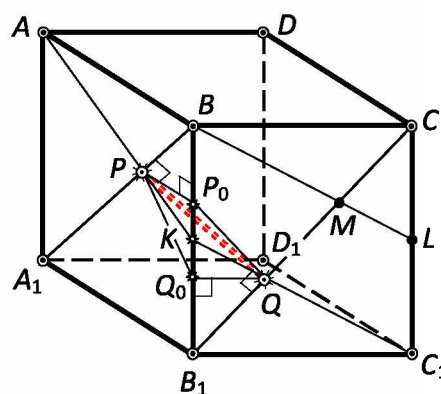


Рис. 4

Далі, взявши до уваги встановлений факт, виконаємо ще одне **внутрішнє косокутне проєкціювання** прямих AB_1 і BC_1 за напрямом $C \rightarrow A_1$, тепер уже на площину основи куба $A_1B_1C_1D_1$. Із цим, через точки A та B проведемо проєкціювальні промені, паралельні CA_1 , і відкладемо на них відрізки AA_0 і BB_0 , рівні CA_1 . A_0 й B_0 – точки перетину променів *внутрішнього проєкціювання* з основною площиною, а A_0B_1 і B_0C_1 , що перетинаються в точці M , є виродженими (слід-) проєкціями двох проєкціювальних площин $\Sigma(AA_0 \cap AB_1)$ і $\Lambda(BB_0 \cap BC_1)$. Перша з них проєкціює AB_1 , а друга – BC_1 . Відомо, що дві проєкціювальні площини мають у своєму перетині проєкціювальну пряму. Шляхом **оберненого внутрішнього проєкціювання** проведемо через точку M пряму n , паралельну напрямку $A_1 \rightarrow C$, а отже, паралельну A_0A та B_0B ; зафіксуємо точки P, Q перетину останньої з діагоналями AB_1, BC_1 : $P = n \cap AB_1, Q = n \cap BC_1$. Оскільки n – спільна пряма площин Σ і Λ , а $AB_1 \subset \Sigma, BC_1 \subset \Lambda$, то точки P і Q обов'язково реально існують. У свою чергу, $n \parallel C_1A$, а $CA_1 \perp AB_1$ і $CA_1 \perp BC_1$. Тому відрізок PQ – шуканий спільний перпендикуляр до AB_1 і BC_1 .

4-й спосіб розв'язання продемонстровано на рисунку 4. Тут, знову ж таки, спільний перпендикуляр діагоналей A_1B і B_1C змодельовано **внутрішнім проєкціюванням** відрізка PQ на передню BB_1C_1C та ліву AA_1B_1B грані куба. Задачу розв'язано в чотири етапи: **аналізу, побудови, доведення, дослідження**.

Висновок: внутрішнє проєкціювання – метод конструктивної стереометрії.
